תהי f פונ' המוגדרת על הקטע . f רציפה בI אם לכל ולכל קיים כך שאם ו אזי .

f רציפה במ"ש(במידה שווה) אם לכל קיים כך שלכל ו כך ש מתקיים ש

# משפט

תהי f פונ' רציפה ב אזי היא רציפה שם במ"ש אם ורק אם קיימים הגבולות ו (גבול סופי כמובן)

## הוכחה

נניח שהגבולות האלה קיימים ונגדיר את הפונ' g המוגדרת בקטע ע"י . הפונ' g הינה רציפה ב. .  
ולכן g רציפה במ"ש ב ובפרט רציפה במ"ש על . אבל עבור ז"א f רציפה במ"ש ב

נניח למשל שלא קיים אזי קיים וסדרות \* המוכלות ב כך ש.  
\* כך ש *,   
ברור שf אינה רציפה במ"ש על שכן .*

# מסקנה

פונק' רציפה במ"ש על קטע סגור I, חייבת להיות חסומה שם.

## הוכחה

ע"פ ההוכחה הקודמת, f הינה הצמצום לקטע I. לפונ' רציפה במ"ש על הקטע החסום והסגור הקטן ביותר המכיל את I(אם אזי , אם אזי וכו'). ולכן f חסומה על J ע"פ משפט ויירשטראס.

## דוגמה

הפונ, , , הינה רציפה ב וגם חסומה שם כי אבל אינה רציפה במ"ש שם שכן לא קיים.

## דוגמה

המסקנה אינה נכונה אם הקטע אינו סגור. למשל, על , (). אם אזי לכל . פונ' זו רציפה במ"ש ב אבל אינה חסומה שם.

# למה

1. אם f רציפה במ"ש בקטע I ו אזי f רציפה במ"ש בקטע J.
2. אם f,g רציפות במ"ש בI אזי רציפות במ"ש בI אף הן.

## הוכחה

אמנם, יהי , קיים ע"פ ההנחה כך ש ו אזי וגם קיים כך שאם ו אזי .  
ניקח אזי אם ו אזי גם וגם ולכן

## הערה

למה זו אינה נכונה עבור מכפלות.

## דוגמה

נקח בקטע .   
אם נקח   
 אבל , =>

# למה

אם ו רציפות במ"ש אזי רציפה במ"ש אף היא.

## הוכחה

יהי צ"ל: קיים כך שאם ו אזי . אמנם, קיים y כך שאם ו אזי . בנוסף לכך קיים כך שאם , אזי . ואז אם ו מתקיים ש:

# למה

אם f רציפה במ"ש בקטע וגם בקטע אזי היא רציפה במ"ש ב.

## הוכחה

יהי . קיים כך שאם ו אזי . גם קיים כך שאם ו אזי . נגדיר . טענה: אם ו אזי .  
אמנם, אם או ע"פ הבחירה של , . נניח אפוא, ש ו ו אזי וגם ולכן וגם ומכאן ש.

# משפט

אם f רציפה בקטע  *וקיים הגבול אזי f רציפה במ"ש על*

## הערה

תוצאות דומות קיימות עבור פונ' המוגדרות על או .

## הוכחה

יהי . קיים K כך שאם אזי . קח כך ש אם ו. עכשיו, נניח ש ו. טענה:   
אמנם, *אם אזי , ואם לא, ולכן , ומכאן ש*

# הגדרה

תהי f מוגדרת עם . נגיד שf מחזורית אם מחזור אם לכל .

## הערה

אם f מחזורית עם מחזור p אזי היא גם מחזורית עם מחזור np לכל .

# משפט

פונ' רציפה המוגדרת על שהיא מחזורית, רציפה במ"ש ב.

## הוכחה

נניח שf מחזורית עם מחזור p>0 => לכל => f רציפה במ"ש בקטע . עכשיו, יהי קח כך שאם ו אזי . תהיינה כך ש נגיד ש. קיים  *כך ש עבור . ואז . ואז כיוון ש* => שכן אבל .

## דוגמה

הפונ' רציפה במ"ש על שכן f מחזורית עם מחזור . שים לב לכך שלא קיים .

# דוגמאות

1. על   
   הפונ' הינה פונ' רציפה על הקטע הסגור => רציפה במ"ש שם => רציפה במ"ש ב. רואים מהחישוב שf גם רציפה במ"ש בקטע ולכן לפי מה שהוכחנו קודם היא רציפה במ"ש ב
2. ב  
   הפונ' רציפה במ"ש ב. אמנם, רציפה במ"ש על ו רציפה במ"ש על (בתור פונ' מחזורית) לכן ההרכבה הינה רציפה במ"ש על .
3. על הקטע .  
   הפונ' הזו רציפה ב. קיים הגבול ולכן f רציפה בקטע ו ולכן f גם רציפה במ"ש ב ולכן רציפה במ"ש גם ב.
4. , =>  
   => הפונ' אינה רציפה במ"ש ב (כי אינה חסומה שם) => אינה רציפה במ"ש ב.